

Modèle 2D pour un écoulement MHD avec  
couche de Hartmann turbulente.

Jean-Philippe Schweitzer

Juin 2001

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
1.1	présentation . . . . .	5
1.1.1	équipe . . . . .	5
1.1.2	projet . . . . .	5
1.2	magnétohydrodynamique . . . . .	5
1.3	objectifs . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Pré-requis, contexte</b>	<b>7</b>
2.1	description de l'expérience de référence . . . . .	7
2.2	effet du champ magnétique sur l'écoulement dans l'expérience MATUR . . . . .	7
2.2.1	nature . . . . .	7
2.2.2	effets . . . . .	8
2.3	equations de base . . . . .	9
2.4	cœur 2d, couche de Hartmann . . . . .	12
2.4.1	cœur 2d . . . . .	12
2.4.2	couche de Hartmann laminaire . . . . .	13
2.5	modèle 2d . . . . .	13
2.5.1	principe . . . . .	13
2.5.2	l'opérateur moyenne . . . . .	15
2.6	stabilité de la couche de Hartmann . . . . .	17
2.7	expression du frottement dans une couche de Hartmann tur- bulente . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Modèles, travail analytique</b>	<b>20</b>
3.1	explicitation des termes dans NS 2d . . . . .	20
3.1.1	forçage . . . . .	20
3.1.2	zone de travail . . . . .	21
3.2	démarche . . . . .	22
3.3	résultats sur les valeurs intégrales . . . . .	22
3.3.1	expression du moment angulaire en fonction de l'intensité	22

3.3.2	premiers résultats : $B=0.5$ T et $B=0.8$ T . . . . .	24
3.4	propriétés du modèle . . . . .	24
3.4.1	calcul du "temps caractéristique" de l'écoulement turbulent . . . . .	24
3.5	estimation d'erreur . . . . .	27
3.5.1	effet de topographie dû à la couche de Hartmann . . . . .	27
3.5.2	effet de "bosselage" du fond . . . . .	27
3.5.3	épaisseurs de couches parallèles : . . . . .	29
3.5.4	termes inertiels . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Simulations numériques</b>	<b>32</b>
4.1	méthode générale . . . . .	32
4.2	Description détaillée . . . . .	33
4.2.1	modèle numérique . . . . .	33
4.2.2	implémentation du modèle turbulent 2d dans FLUENT . . . . .	35
4.2.3	post traitement . . . . .	36
4.3	résultats . . . . .	36
4.3.1	aspect de l'écoulement 2d . . . . .	36
4.3.2	moment angulaire . . . . .	39
4.3.3	profils locaux . . . . .	39
4.3.4	épaisseur de la couche cisailée libre . . . . .	41
4.3.5	spectre . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>46</b>
<b>6</b>	<b>Bibliography</b>	<b>46</b>

**Note Synthétique :** Le travail accompli dans le cadre de ce stage s'intègre dans un vaste programme d'études des écoulements mhd bidimensionnels. Il s'est agit de décrire ces derniers quand ils comportent une couche de Hartmann turbulente.

Pour ce faire, nous utilisons un modèle turbulent de la couche de Hartmann, dont la résolution est effectuée sous MATLAB. Le résultat est ensuite implémenté dans le modèle 2d appliqué à notre configuration, résolu sous MATLAB puis FLUENT. Nous cherchons à obtenir des résultats proches des mesures de l'expérience MATUR. Nous avons pu profiter de travaux déjà existants, notamment concernant l'utilisation de FLUENT et le post-traitement des résultats de simulations.

**Remerciements :** Ce stage de fin d'études, et bien plus, n'aurait certainement pas eu un tel caractère ludique et décontracté, et pour autant productif, sans l'encadrement exemplaire d'Alban Pothérat. Outre sa grande pédagogie et son sens physique poussé pour m'initier aux rouages de la mhd, il a su me faire confiance en me laissant une confortable indépendance quant à la gestion de mon travail. Nous avons d'autre part eu tous deux le loisir d'augmenter nos connaissances informatiques par un échange de compétence très concluant.

Je tiens aussi à rendre sincèrement hommage à Pablo "Magic" Moresco non seulement pour l'aide non comptée et inestimable qu'il m'a fournie tout au long de ce stage, mais encore pour sa bonne humeur permanente et son esprit vif.

Finalement, je voudrais remercier chaleureusement les institutions universitaires anglaises pour le support financier qu'elles ne m'ont pas offert et avec lequel je n'aurais probablement pas partagé cette collocation à jamais inoubliable avec Victoria, Anneke, Rhona et James dans cette magique maison du *46 Newton Road*.

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 présentation

Mon stage de fin d'études de l'École Centrale Paris, option "Sciences et Génie Energétique", et de D.E.A "Physique des transferts et combustion", s'est effectué au Hopkinson Lab, à l'Engineering Department de l'université de Cambridge. Ce département traite les sciences appliquées en général, allant de l'informatique aux moteurs à explosions en passant par l'électronique.

#### 1.1.1 équipe

J'ai travaillé sous la responsabilité de l'emminent Dr Alban Pothérat, lui même appartenant à l'équipe du "Liquid Metal Group" de Peter Davidson et Thierry Alboussière.

#### 1.1.2 projet

Cette étude s'inscrit dans un programme de plusieurs années visant à comprendre et modéliser les écoulements de métaux liquides confinés sous champ magnétique intense. Un des domaines d'applications concerne les réacteurs à fusion (Tokamak), impliquant ainsi le CEA.

### 1.2 magnétohydrodynamique

La magnétohydrodynamique (MHD) est la mécanique des fluides conducteurs s'écoulant dans un champ magnétique. Dans notre cas, le champ magnétique est imposé uniforme et n'est pas perturbé par les mouvements du fluide.

### 1.3 objectifs

Nous cherchons à créer un modèle d'écoulement 2d de mercure, turbulent, afin de retrouver les résultats expérimentaux obtenus sur le dispositif MATUR. Cette expérience a été mise en place au laboratoire MADYLAM du CNRS à Grenoble et a connu depuis de nombreuses évolutions. Nous nous attacherons à décrire l'écoulement lorsqu'il comprend une couche limite pariétale turbulente, c'est à dire dans une gamme de paramètres jusqu'ici non explorée.

# Chapitre 2

## Pré-requis, contexte

### 2.1 description de l'expérience de référence

**Géométrie, dimensions :** L'expérience de référence, illustrée par la fig. 2.1, que nous cherchons à décrire est constituée d'un récipient cylindrique fermé de rayon 11 cm, contenant une hauteur de mercure de 1 cm. Les parois inférieures et supérieures sont isolantes. La paroi latérale est conductrice.

**Injection de courant :** Un cercle de 140 électrodes est disposé dans la paroi inférieure, au rayon  $r = 5.4\text{cm}$ . Les électrodes, de  $1\text{mm}$  chacune, sont espacées de  $2.42\text{mm}$ .

**Raison d'être et principe de fonctionnement :** Cette expérience a été mise en place afin d'étudier des écoulements bidimensionnels turbulents. Le courant injecté boucle entre le cercle d'électrodes et la paroi conductrice latérale, mettant ainsi la couronne extérieure de fluide en mouvement par force de Laplace. Le disque intérieur n'étant pas entraîné, une couche libre cisailée prend naissance au niveau de l'injection du courant. Elle génère de la turbulence dans l'écoulement.

### 2.2 effet du champ magnétique sur l'écoulement dans l'expérience MATUR

#### 2.2.1 nature

Le champ magnétique  $\mathbf{B}$  est imposé vertical et uniforme. D'autre part, le champ induit par le courant électrique résultant des mouvements de fluides



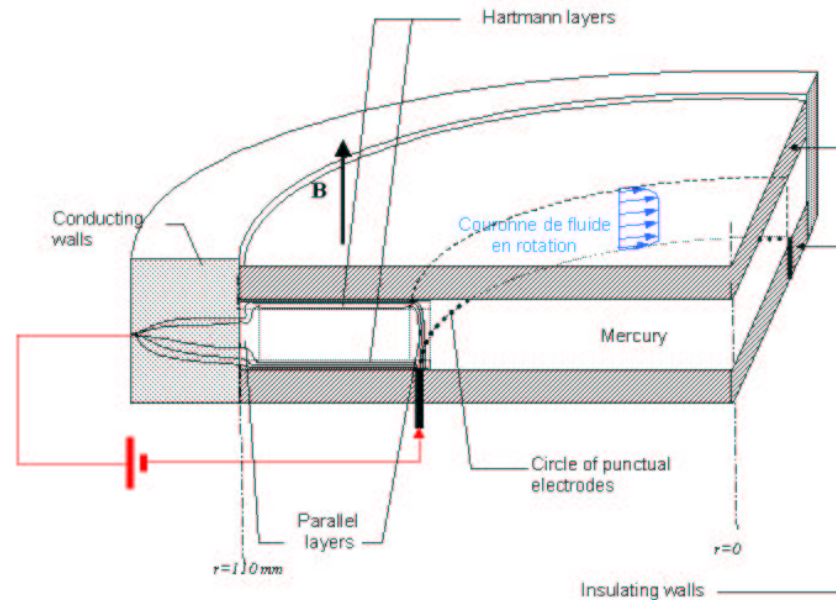


FIG. 2.1 – l'expérience matur

est négligeable dans les conditions du laboratoire.

### 2.2.2 effets

L'existence d'un champ magnétique très intense permet de diviser l'écoulement en deux zones distinctes : un écoulement de cœur bidimensionnel, et une couche limite pariétale visqueuse. Explicitons les caractéristiques principales de ces deux zones :

- ▷ on se place dans le cas d'un écoulement 3d, (cf fig. 2.2), de vitesse suivant  $\mathbf{e}_x$ , soumis à un champ magnétique  $\mathbf{B}$  parallèle à  $\mathbf{e}_z$ . Il existe un gradient de vitesse vertical. Le mouvement horizontal global suivant  $\mathbf{e}_x$  dans le champ magnétique vertical crée un courant  $j_y$ , vers les  $y$  décroissants. La vitesse à  $z' < z$  étant plus faible, le courant  $j'_y$  créé y est inférieur. Ce dernier est donc surpassé par le courant induit selon  $-e_y$  par la

boucle précédente qui se referme au voisinage de  $z'$ . Il s'établit ainsi une boucle dans le plan  $(e_y, e_z)$ . Cette boucle engendre une force de Lorentz parallèle à  $e_x$ , augmentant la vitesse inférieure et diminuant la vitesse supérieure. Ce phénomène uniformise donc l'écoulement suivant  $\mathbf{B}$  : le cœur de l'écoulement est alors bidimensionnel. Nous verrons plus tard (cf §.2.4) que dans cette configuration, les seules boucles de courant persistant dans le cœur sont orthogonales à  $\mathbf{B}$  et les forces de Lorentz concentriques, dans le plan  $(e_x, e_y)$  : elles n'apportent qu'une contribution de pression au fluide et ne sont pas motrices.

- ▷ dans la zone proche de la paroi horizontale (fig. 2.3), les effets visqueux imposent l'existence d'un gradient de vitesse. Dans notre configuration, leurs effets sont concentrés dans une couche limite de faible extension par rapport au cœur de l'écoulement, en raison de la forte intensité du champ magnétique. Dans cette région,  $\mathbf{B}$  ne peut donc pas uniformiser les vitesses. Cette zone définit la couche de Hartmann, couche limite pariétale visqueuse, résultant de l'équilibre entre les forces de Lorentz et la viscosité. Seule zone d'existence de gradients de vitesse, le courant électrique s'y concentre, engendrant un mouvement de rotation de la couronne extérieure de fluide par la force de Lorentz. La couche entraîne alors le cœur par frottement visqueux. On dit alors que la couche de Hartmann est *active*.

Cet équilibre entre les forces visqueuses et les forces de Lorentz dans la couche de Hartmann permet d'introduire (cf §.2.4) l'échelle caractéristique de la couche de Hartmann, c'est à dire l'échelle à laquelle les effets visqueux sont d'ordre 1.

## 2.3 equations de base

Afin de décrire l'expérience MATUR (fig. 2.1), nous étudions un écoulement de mercure, de vitesse  $\mathbf{u}$ , masse volumique  $\rho$ , viscosité cinématique  $\nu$ , pression  $p$  et de conductivité électrique  $\sigma$ , soumis à un champ magnétique  $\mathbf{B}$  vertical. Nous injectons un courant  $\mathbf{j}$  vertical. L'équation du mouvement, ou équation de Navier Stokes tridimensionnelle, s'écrit alors :

$$(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (2.1)$$

L'ensemble des phénomènes mhd abordés ici sont décrits en détail dans [11] et [7].

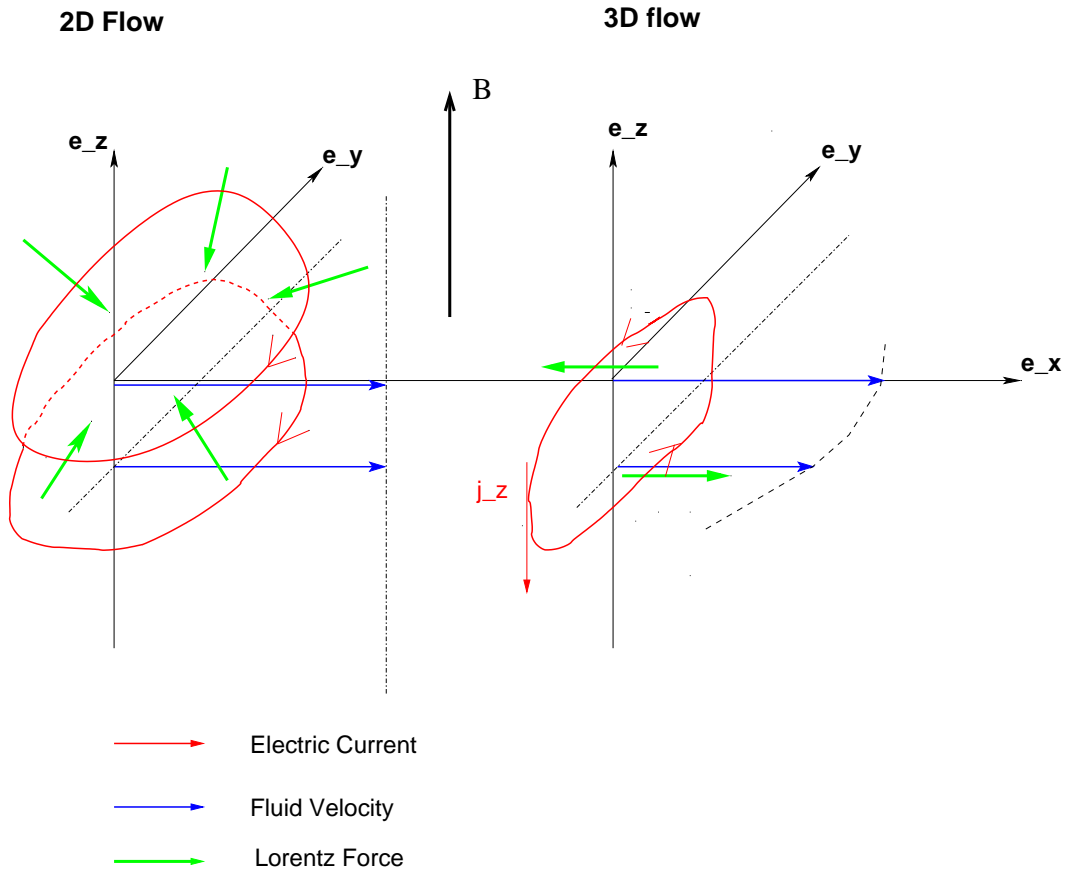


FIG. 2.2 – mécanisme d'uniformisation du profil de vitesse dans la direction du champ.

**Projection, adimensionnement** Nous posons les grandeurs adimensionnelles suivantes :

$$\begin{aligned}
 x_{dim} &= \frac{a}{\lambda} x, & t_{dim} &= \frac{a}{\lambda U} t, & \mathbf{j}_{\perp dim} &= \sigma B U \mathbf{j}, & p_{dim} &= \rho U^2 p, \\
 y_{dim} &= \frac{a}{\lambda} y, & \mathbf{u}_{\perp dim} &= U \mathbf{u}_{\perp}, & j_{z dim} &= \lambda \sigma B U j_z, & \mathbf{B}_{dim} &= B \mathbf{e}_z, \\
 z_{dim} &= a z, & w_{dim} &= \lambda U w, & & & & 
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Notons que l'introduction de la grandeur  $\lambda$  nous permet de distinguer les échelles perpendiculaire et parallèle au champ magnétique  $\mathbf{B}$ .

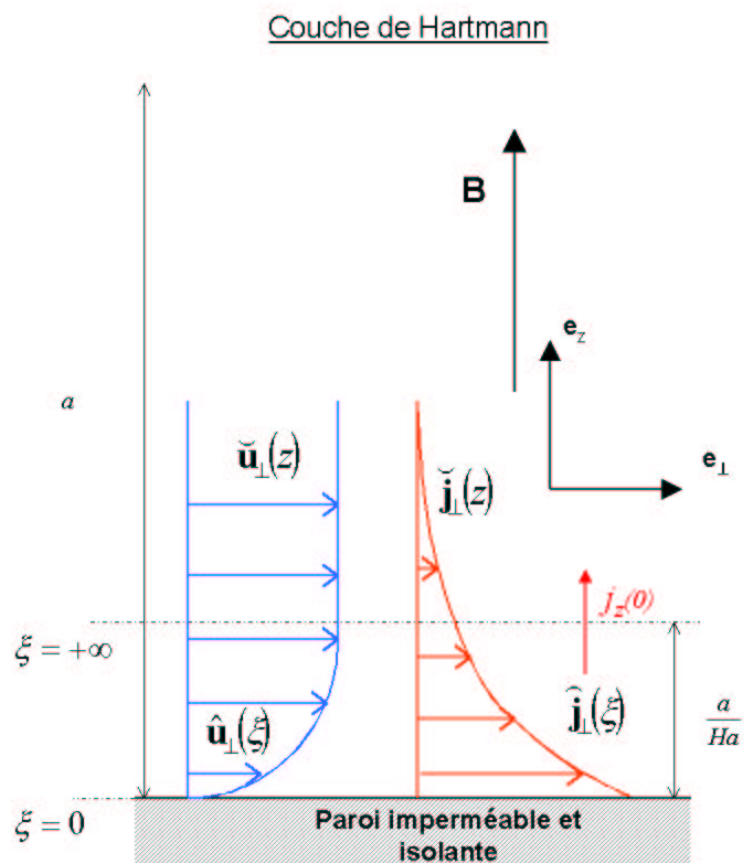


FIG. 2.3 – le courant subsiste dans les zones où résident des gradients de vitesse (dans les couches de Hartmann), il est nul ailleurs (dans le cœur).

On peut alors adimensionner et projeter (2.1), ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{N} (\partial_t \mathbf{u}_\perp + \mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp \mathbf{u}_\perp + w \partial_z \mathbf{u}_\perp + \nabla_\perp p) = \\ \frac{\lambda^2}{Ha^2} \Delta_\perp \mathbf{u}_\perp + \frac{1}{Ha^2} \partial_{zz}^2 \mathbf{u}_\perp + \mathbf{j}_\perp \times \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\frac{\lambda}{N} \left( \partial_t w + \mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp w + w \partial_z w + \frac{\partial_z p}{\lambda} \right) - \frac{\lambda^2}{Ha^2} \Delta_\perp w - \frac{1}{Ha^2} \partial_{zz}^2 w = 0, \quad (2.4)$$

$\mathbf{u}_\perp$  est la vitesse dans le plan  $(e_x, e_y)$ ,  $\Delta_\perp$  et  $\nabla_\perp$  la restriction au plan  $(e_x, e_y)$  des opérateurs  $\Delta$  et  $\nabla$ . On fait ainsi apparaître le nombre de Hartmann  $Ha$  et le paramètre d'interaction  $N$ , donnés par :

$$Ha = aB \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}}, \quad N = \frac{\sigma B^2 a}{\rho U}. \quad (2.5)$$

Le carré du nombre de Hartmann exprime le rapport des forces de Laplace sur la viscosité. Le paramètre d'interaction  $N$  le rapport des forces de Laplace et de l'inertie.

$$Ha^2 = \frac{\text{laplace}}{\text{viscosité}}, \quad N = \frac{\text{laplace}}{\text{inertie}}.$$

Les équations (2.6), (2.7) et (2.8) représentent respectivement l'équation de continuité, la continuité du courant et la loi d'Ohm.

$$\nabla_\perp \cdot \mathbf{u}_\perp + \partial_z w = 0 \quad (2.6)$$

$$\nabla_\perp \cdot \mathbf{j}_\perp + \partial_z j_z = 0, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{j} = -\nabla \phi + \mathbf{u} \times \mathbf{e}_z. \quad (2.8)$$

À noter que le champ magnétique induit par les boucles de courant créés par le mouvement du fluide est négligeable dans notre configuration, nous dispensant ainsi de prendre en compte les équations de Maxwell pour décrire notre écoulement. [11]

## 2.4 cœur 2d, couche de Hartmann

### 2.4.1 cœur 2d

Nous avons vu au §.2.2.2 que la présence d'un champ magnétique  $\mathbf{B}$  fort rend le cœur de l'écoulement bidimensionnel. En effet, (2.3) à l'ordre 1 pour

$Ha \gg 1$  peut s'écrire :

$$\mathbf{j}_\perp \times \mathbf{e}_z = \nabla_\perp p \quad (2.9)$$

et aussi  $\mathbf{j} = -\sigma(\nabla\phi + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$

Ainsi, en prenant le rotationnel de (2.9), nous obtenons :

$$\partial_z \mathbf{j}_\perp = \partial_z \mathbf{u}_\perp \times \mathbf{e}_z = \mathbf{0}, \quad (2.10)$$

$$\Rightarrow \partial_z \mathbf{u}_\perp = \mathbf{0}. \quad (2.11)$$

Le cœur de l'écoulement est donc bien 2d.

## 2.4.2 couche de Hartmann laminaire

Dans tout l'écoulement, la force de Laplace est forte et dominante. Cependant, dans la couche limite, le frottement visqueux entre deux plans horizontaux équilibre la force de Laplace, comme nous l'avons décrit au §.2.2.2. L'équation (2.3) devient, en ne gardant que ces 2 termes dominants :

$$\frac{1}{Ha^2} \partial_{zz}^2 \mathbf{u}_{perp} \sim \mathbf{u} \quad (2.12)$$

Cet équilibre traduit bien le fait qu'il existe une échelle à laquelle le terme  $\frac{1}{Ha^2} \partial_{zz}^2$  n'est plus négligeable mais d'ordre 1. Cette échelle vaut donc  $\xi = \frac{z}{Ha}$ . Alors, avec la condition limite  $u(z=0) = 0$  et le raccord cœur-couche limite ( $\lim_{\xi \rightarrow \infty} u(\xi) = U_{cœur}(z=0)$ ), (2.1) dont on ne garde que les termes d'ordre 1 admet pour solution :

$$u = u_{cœur} (1 - e^{-Haz}) \quad (2.13)$$

d'où on peut déduire l'épaisseur adimensionnée par  $a$  de la couche de Hartmann laminaire :  $\delta = \frac{1}{Ha}$ . [7]

## 2.5 modèle 2d

### 2.5.1 principe

Comme schématisé sur la figure (2.4), l'épaisseur de la couche de Hartmann étant très faible, une vitesse moyennée suivant la verticale sera assez proche de la vitesse de cœur. Nous introduisons donc un opérateur moyenne, qui appliqué à (2.3), nous permet d'éliminer la dépendance en  $z$ .

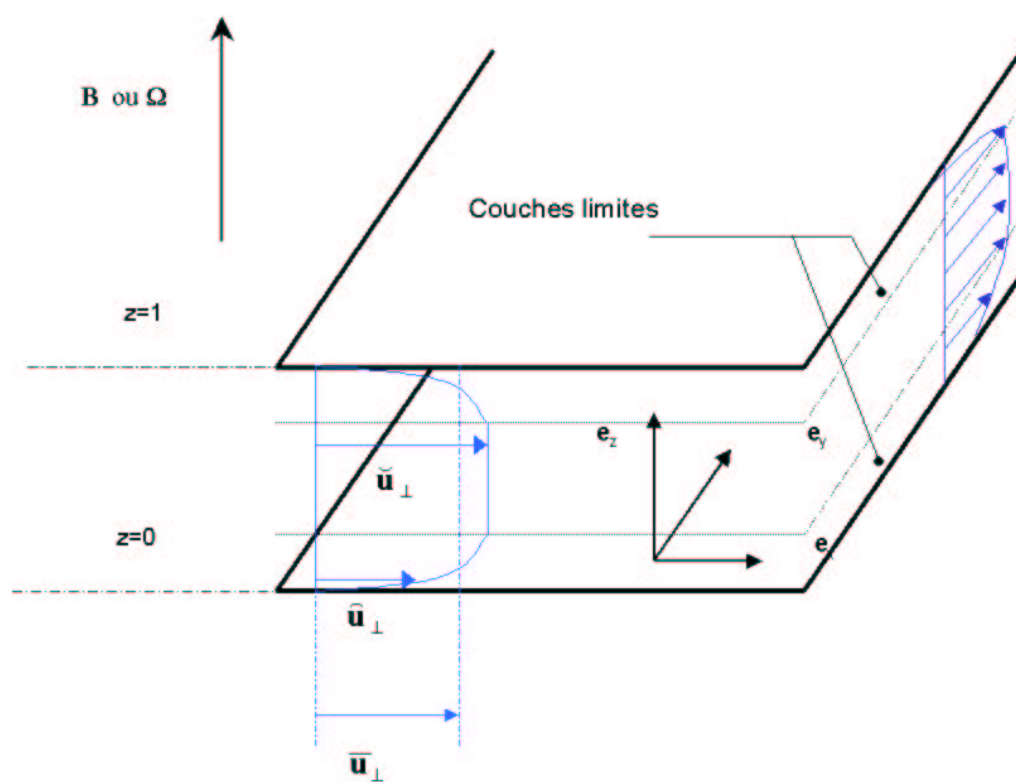


FIG. 2.4 – vers le modèle 2d

### 2.5.2 l'opérateur moyenne

**Introduction et intérêt** On considère un écoulement de fluide entre deux plaques infinies (à  $z = 0$  et  $z = 1$ , grandeur adimensionnelle) (cf fig. 2.4), à grand nombre de Hartmann, comportant deux zones distinctes : une zone de couche limite et une zone de cœur. Soit  $g$  une quantité physique de notre écoulement à qui on applique l'opérateur de moyenne :

$$\bar{g}(x, y) = \int_0^1 g dz, = \int_0^1 \check{g} dz + \int_0^\eta (\hat{g}(z) - \check{g}(0)) dz, \quad (2.14)$$

On sépare l'intégrale en une partie de cœur et une partie de couche.  $\check{g}$  représente la restriction de  $g$  au cœur,  $\hat{g}$  sa restriction à la couche limite.  $\eta$  est une échelle intermédiaire à laquelle se fait le raccord entre la fonction de cœur et la fonction de couche. On choisit  $\eta \gg \delta$ ,  $\delta$  étant l'épaisseur de la couche, de sorte que le raccord se fasse bien à l'extérieur de la couche de Hartmann, tel que  $g$  soit évalué par  $\check{g}$ , fonction de cœur. D'autre part,  $\eta \ll 1$  assure que la fonction de cœur  $\check{g}$  ne varie pas à cette échelle. On effectue alors un changement de variable dans la zone qui couvre la couche, afin de décrire cette dernière à son échelle, comme nous l'avons vu au §.2.4, On pose donc  $z = \xi\delta$ , ce qui donne :

$$\bar{g}(x, y) = \int_0^1 \check{g} dz + \delta \int_0^{\frac{\eta}{\delta}} (\hat{g}(\xi) - \check{g}(0)) d\xi,$$

On a  $\frac{\eta}{\delta} \gg 1$ , d'où, quand  $\frac{\eta}{\delta} \rightarrow \infty$  :

$$\bar{g}(x, y) = \int_0^1 \check{g} dz + \delta \int_0^\infty (\hat{g}(\xi) - \check{g}(0)) d\xi, \quad (2.15)$$

$$\bar{g}(x, y) = \langle \check{g} \rangle_{\text{cœur}} + \delta \langle \hat{g} \rangle_{\text{couche}}. \quad (2.16)$$

On notera désormais  $g' = g - \bar{g}$  l'écart à la moyenne.

**Moyennes des équations projetées** Afin de se débarrasser de la dépendance en  $z$ , nous appliquons l'opérateur de moyenne défini en (2.15) à l'équation (2.3) :

$$\frac{\lambda}{N} \left( \partial_t \bar{\mathbf{u}}_\perp + (\bar{\mathbf{u}}_\perp \cdot \nabla_\perp) \bar{\mathbf{u}}_\perp + \overline{(\mathbf{u}'_\perp \cdot \nabla_\perp) \mathbf{u}'_\perp} + \nabla_\perp \bar{p} \right) = \frac{\lambda^2}{Ha^2} \Delta_\perp \bar{\mathbf{u}}_\perp + \frac{1}{Ha^2} \overline{\partial_{zz}^2 \mathbf{u}_\perp} + \bar{\mathbf{j}} \times \mathbf{e}_z \quad (2.17)$$



Il est important de noter que  $u'$  représente l'écart entre la vitesse de cœur et la moyenne, comme expliqué en fin de §. 2.15, et non pas des fluctuations turbulentes de la vitesse.

Il nous faut maintenant évaluer deux termes du membre de droite :  $\overline{\frac{1}{Ha^2} \partial_{zz}^2 \mathbf{u}_\perp}$  et  $\overline{\mathbf{j}} \times \mathbf{e}_z$ .

$$\begin{aligned} \overline{\partial_{zz}^2 \mathbf{u}_\perp} &= \int_0^1 \partial_{zz}^2 \mathbf{u}_\perp dz = \left[ \partial_z \mathbf{u}_\perp \right]_0^1, \\ &= Ha \left[ \partial_\xi \mathbf{u}_\perp \right]_0^{Ha}, \text{ avec } \xi = Haz, \\ &= Ha \left[ \partial_\xi \mathbf{u}_\perp \right]_0^\infty, \text{ car } Ha \gg 1, \\ &= Ha \tau_W. \end{aligned}$$

$$\text{d'où finalement : } \overline{\frac{1}{Ha^2} \partial_{zz}^2 \mathbf{u}_\perp} = \frac{1}{Ha} \tau_W. \quad (2.18)$$

On fait ainsi apparaître le frottement total en  $(x, y)$  dans les couches de Hartmann (plaques inférieures et supérieures) :  $\tau_W$ .

D'autre part, nous pouvons exprimer le terme  $\overline{\mathbf{j}} \times \mathbf{e}_z$  par :  $\overline{\mathbf{j}}_\perp \times \mathbf{e}_z = \frac{1}{Ha} \nabla \Psi_0 \times \mathbf{e}_z$ , où  $\Psi_0$  est définie telle que  $\frac{1}{Ha} \Delta_\perp \Psi_0 = -j_W$ ,  $j_W$  étant la densité de courant injectée à travers la paroi horizontale. [9]

d'où finalement :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{N} \left( \partial_t \bar{\mathbf{u}}_\perp + (\bar{\mathbf{u}}_\perp \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}_\perp + \overline{(\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}'} + \nabla \bar{p} \right) = \\ \frac{\lambda^2}{Ha^2} \Delta_\perp \bar{\mathbf{u}}_\perp - \frac{1}{Ha} \tau_W + \frac{1}{Ha} \mathbf{u}_0, \end{aligned} \quad (2.19)$$

où  $\mathbf{u}_0$  est un champ de vitesse 2d défini par  $\mathbf{u}_0 = \nabla \Psi_0 \times \mathbf{e}_z$ .

Les termes supplémentaires,  $\mathbf{u}_0 = \nabla \Psi_0 \times \mathbf{e}_z$  représentant le forçage imposé à l'écoulement et  $\frac{1}{Ha} \tau_W$  traduisant les frottements dans les couches de Hartmann, sont tous deux d'ordre  $\frac{1}{Ha}$ .

Afin de construire notre modèle 2d, il est crucial de noter que nous devons modéliser trois termes de (2.19) :

- ▷  $\overline{(\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}'}$  caractérisant les termes inertiels dus à l'écart entre  $\mathbf{u}_{\text{cœur}}$  et  $\bar{\mathbf{u}}$ , qui engendrent des recirculations entre la couche et le cœur [10],
- ▷  $\mathbf{u}_0$  le forçage imposé au fluide par l'injection de courant,
- ▷  $\tau_W(x, y)$  le frottement total dans les couches de Hartmann.

Leur expression découlera des modèles adaptés respectivement pour l'écoulement de cœur et l'écoulement de couche limite.

## 2.6 stabilité de la couche de Hartmann

La couche de Hartmann en régime laminaire est bien connue et bien décrite par la théorie (cf. [14] et [10]). Elle présente un profil de vitesse exponentiel et une épaisseur fixe, comme nous l'avons abordé au §.2.4.

La stabilité de la couche est piloté par le paramètre  $R = \frac{Re}{Ha}$ . La couche est linéairement très stable : elle absorbe des perturbations infinitésimales sans changer de régime jusqu'à des valeurs de  $R \sim 48000$  [1]. En revanche, des études de stabilité énergétique [1] montrent qu'elle ne résorbe des perturbations d'amplitude finie que jusque des  $R \sim 25$ . Des études de stabilité plus poussées sont actuellement menées, notamment par Pablo "Magic" Moresco, du "Liquid Metals Group" (Cambridge University Engineering Department). En ce qui nous concerne, nous nous appuyons sur les résultats expérimentaux pour prévoir la destabilisation de la couche de Hartmann, traduite par une saturation du moment angulaire, typiquement à un  $R \sim 330$ . cf §. 4.2.2 et fig. 3.3. Cette valeur concorde avec celle trouvée par Hua et Lykoudis pour des écoulements en conduite. [3]. Notre travail consiste par ailleurs à décrire l'écoulement lorsque la couche de Hartmann est destabilisée. Nous avons pour cela besoin d'une expression du frottement  $\tau_W$  en régime turbulent. Celle ci est donnée par [2] que nous allons succinctement décrire dans le §. 2.7.

## 2.7 expression du frottement dans une couche de Hartmann turbulente

Un écoulement de mercure, de vitesse à l'infini (infini à l'échelle de la couche de Hartmann)  $U_{cœur}$ , s'écoule sur une plaque infinie et est plongé dans un champ magnétique  $\mathbf{B}$  stationnaire et uniforme orthogonal à la plaque. (cf fig. 2.5)

En régime laminaire (cf § 2.2.2) la couche de Hartmann résulte de l'équilibre entre les forces de Lorentz et la viscosité. Nous cherchons à étudier le comportement de la couche quand elle est destabilisée. Il nous faut donc évaluer le rapport entre les effets inertiels et la force de Laplace mis en jeu dans la couche turbulente. Pour cela, nous pouvons utiliser le paramètre d'interaction  $N$  introduit en (2.5), mais en prenant le soin de le construire à partir de

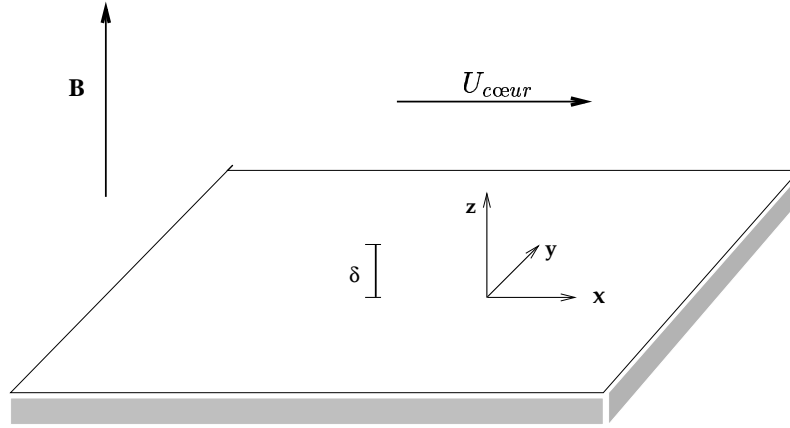


FIG. 2.5 – configuration d'écoulement.

grandeurs caractéristiques de la turbulence.

Ainsi, avec  $\delta_t$  l'épaisseur dimensionnelle de la couche de Hartmann turbulente et  $u_*$  les fluctuations de vitesse turbulente, on écrit :

$$N^* = \frac{\sigma B^2 \delta_t}{\rho u_*}. \quad (2.20)$$

Il est montré dans [2] que le paramètre d'interaction construit sur des grandeurs turbulentes  $N^* \ll 1$ . Autrement dit, les forces de Lorentz sont négligeables devant les forces inertielles. La couche de Hartmann turbulente résulte alors d'un équilibre entre *Inertie* et *Viscosité*.

Le champ magnétique  $\mathbf{B}$  n'affecte donc pas la nature de la turbulence dans la couche limite. On peut donc décrire la couche limite de manière classique, c'est à dire par une sous couche laminaire pariétale et une couche de viscosité turbillonnère.

Ainsi, en appliquant le modèle de Prandtl dans la couche turbulente, avec comme condition aux limites la sous-couche pariétale visqueuse d'une part et le raccord à l'écoulement de cœur d'autre part, on trouve :

$$\partial_\xi \langle u_x \rangle = \frac{2.5}{\sqrt{R}} \frac{\sqrt{\langle \tau \rangle}}{\xi}, \quad (2.21)$$

$$\text{où } R = \frac{Re}{Ha} = \frac{U_{cœur} \delta}{\nu}. \quad (2.22)$$

$\tau$  est la somme du frottement turbulent et du frottement visqueux,  $u_x$  la vitesse horizontale dans la couche limite.

A noter que la forme à variables séparées du profil de vitesse  $u = f(\xi)g(x, y)$

qui apparaît dans la théorie classique de la couche de Hartmann est toujours valide dans le cadre de la couche de Hartmann turbulente.

Nous utiliserons pour la suite une adaptation de la résolution numérique par MATLAB de (2.21) décrite dans [2].

Nous allons désormais nous attacher à rassembler toutes les propriétés présentées dans ce chapitre afin de construire un premier modèle rendant comptes des phénomènes physiques présents dans MATUR.

# Chapitre 3

## Modèles, travail analytique

On se place dans une configuration d'écoulement de mercure telle que nous l'avons décrite précédemment afin de retrouver des résultats obtenus par l'expérience MATUR. Le travail effectué dans cette partie consiste à tester la validité de notre modèle sur le frottement dans les couches de Hartmann turbulentes avant de passer à des simulations numériques plus précises.

### 3.1 explicitation des termes dans NS 2d

On a vu que nous pouvions décrire le modèle 2d appliqué à notre problème par l'équation (2.19)

$$\frac{\lambda}{N} \left( \partial_t \bar{\mathbf{u}}_{\perp} + (\bar{\mathbf{u}}_{\perp} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}_{\perp} + \overline{(\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}'} + \nabla \bar{p} \right) = \frac{\lambda^2}{Ha^2} \Delta_{\perp} \bar{\mathbf{u}}_{\perp} - \frac{1}{Ha} \tau_W + \frac{1}{Ha} \mathbf{u}_0, \quad (3.1)$$

où il nous faut modéliser les termes d'*inertie*, de *forçage* et de *frottement turbulent* (cf. § 2.15). Nous tâcherons de nous placer dans des cas tels que le terme  $\overline{(\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}'}$  soit négligeable devant les autres termes.

#### 3.1.1 forçage

Le terme  $\frac{1}{Ha} \mathbf{u}_0$  représente le forçage imposé au fluide par l'injection de courant à la paroi du fond. Il est important de noter que ce forçage  $u_0$  ne dépend pas de  $z$  ni de  $u$ .

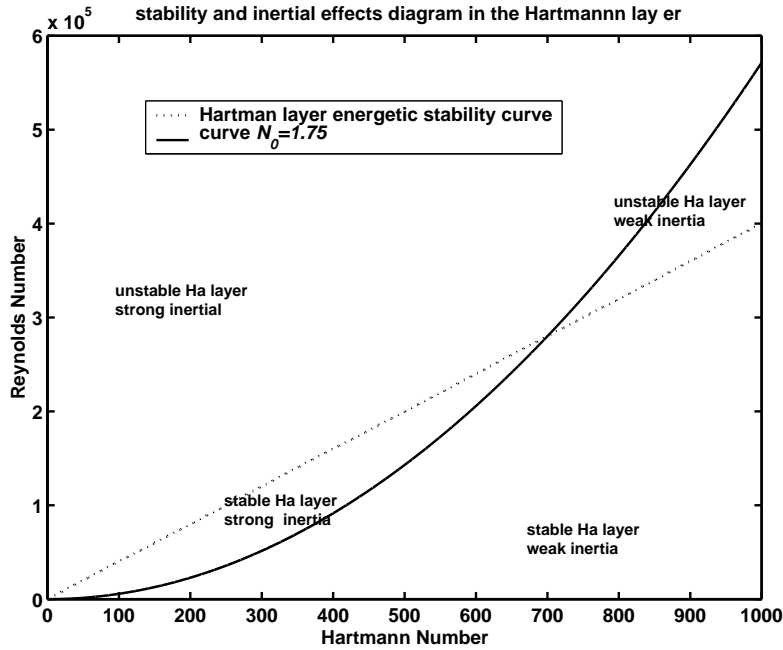


FIG. 3.1 – zone d'influence des différents termes

### 3.1.2 zone de travail

**Étude déjà effectuée :** Deux zones de travail ont déjà fait l'objet de descriptions précises, toutes deux dans le cas d'une couche de Hartmann laminaire :

- ▷ en 1982, un modèle linéaire est établi dans [14] décrivant la zone de la fig. 3.1 *couche de Hartmann stable, faible inertie*. Dans ce cas, le terme de (3.1)  $\overline{(\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}'}$  est négligeable devant le frottement dans la couche de Hartmann, qui s'écrit :  $\frac{u}{t_H}$ .
- ▷ par la suite, des travaux ont été menés [10] sur la zone *couche de Hartmann stable, forte inertie*, prenant en compte les recirculations entre la couche de Hartmann et le cœur, via le terme  $\overline{(\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}'}$  et en écrivant un nouveau modèle pour la couche de Hartmann.

#### Graphie inertie/régime

**Description :** Sur la fig. 3.1, la droite représente une limite de destabilisation de couche, caractérisée par  $R = \frac{Re}{Ha} = cste$ . La parabole  $\frac{Re}{Ha^2} = cte$  décrit des effets inertiels d'intensité constante.

**Notre domaine :** on travaille dans une zone telle que les termes  $(\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}'$  (cf §.3.5.4) puissent être négligés, et où la couche de Hartmann est turbulente. Typiquement, prenant en compte les dimensions de notre écoulement, nous allons nous situer à des champs  $B = 0.5T$  et  $B = 0.8T$ .

## 3.2 démarche

Nous utilisons la résolution numérique de (2.21) écrite dans [2] sous MATLAB. Celle-ci donne un  $\tau_W$  en régime turbulent pour une valeur de la vitesse de cœur. En effectuant une boucle sur  $U_{\text{cœur}}$  de cet algorithme, nous créons un tableau  $(u, \tau_W(u))$ .

Après avoir rendu ce tableau dimensionnel, un raisonnement sur les grandeurs intégrales nous permet d'obtenir un nouveau tableau  $(I, L = f(I))$ ,  $I$  étant le courant injecté, et  $L$  le moment angulaire global. Ces deux grandeurs ont expérimentalement été mesurées à différentes valeurs de  $\mathbf{B}$ ; nous avons ainsi accès à une première estimation de notre modèle.

## 3.3 résultats sur les valeurs intégrales

### 3.3.1 expression du moment angulaire en fonction de l'intensité

Nous cherchons à estimer  $L(I)$  à l'état quasi-stationnaire, c'est à dire quand les grandeurs intégrales ne varient plus sensiblement.

Effectuons un bilan de quantité de mouvement globale ( $L$ ) appliqué à l'expérience : le forçage apporte une contribution  $\frac{L_0}{t_H}$ , alors que le frottement total dans les couches de Hartmann est dissipatif. Ceci nous donne :

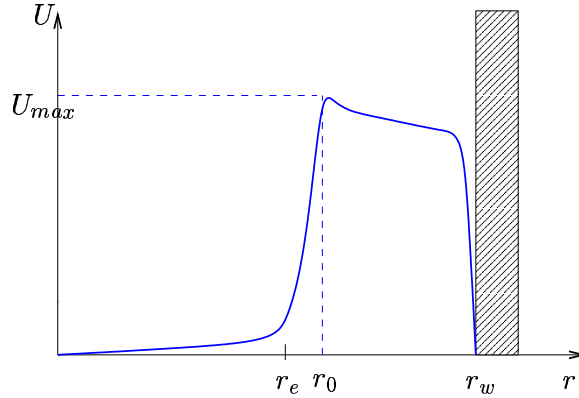
$$\frac{dL}{dt} = \frac{L_0}{t_H} - \frac{2\pi}{\rho a} \int_0^{r_w} 2\tau_W(u(r))r^2 dr \quad (3.2)$$

où le moment angulaire  $L = \int_{\Omega} \mathbf{u} \times d\Omega$ , et  $d\Omega = 2\pi r^2 dr$ .

Le facteur 2 devant  $\tau_W$  traduit la présence de deux couches de Hartmann, une en  $z = 0$ , l'autre en  $z = 1$ .

Nous ne pouvons pas à priori calculer le terme intégral de (3.2) en raison de la dépendance non explicite de  $\tau_W$  en  $u(r)$ .

**Évaluation du freinage :** L'allure typique d'un profil radial de vitesse azimutale issu de l'expérience (illustré par la fig. 3.2) suggère de séparer l'intégrale en deux parties,  $\int_0^{r_w} = \int_0^{r_e} + \int_{r_e}^{r_w}$ . La première partie est considérée


 FIG. 3.2 – profil de vitesse : injection du courant en  $r_e$ 

nulle car  $u(r < r_e) \ll u(r > r_e)$ , et la deuxième partie est estimée en utilisant le théorème de la moyenne de la façon suivante :

$$\exists r_0 \in [r_e, r_w] tq \int_{r_e}^{r_w} 2\tau_W(u(r))r^2 dr = 2\tau_W(U_{max}) \int_{r_e}^{r_w} r^2 dr, \quad (3.3)$$

avec  $U_{max} = U(r_0)$ .

Ainsi, une fois atteint le régime quasi-stationnaire, on a  $\frac{dL}{dt} = 0$ , donc (3.2) devient :

$$\frac{dL}{dt} = 0 = \frac{L_0}{t_H} - \frac{2\pi}{\rho a} \frac{r_w^3 - r_e^3}{3} 2\tau_W(U_{max}). \quad (3.4)$$

**Calcul de  $U_{max}(I)$  :** En grandeurs adimensionnelles, nous obtenons donc une relation de la forme :

$$\frac{L_0}{t_H} = g(U_{max}, \tau_W), \quad (3.5)$$

où  $g$  est une fonction non linéaire de  $U_{max}$  et  $\tau_W(U_{max})$ .

De plus, on peut exprimer  $L_0$  en fonction de  $I$  le courant injecté :

$$\frac{L_0}{t_H} = \frac{r_w^2 - r_e^2}{2\rho a} I, \quad (3.6)$$

L'équation (3.5) devient alors :

$$g(U_{max}) = AI, \text{ avec } A = \frac{3B}{8\pi\rho} \left( \frac{r_w^2 - r_e^2}{r_w^3 - r_e^3} \right), \quad (3.7)$$



En utilisant le tableau construit sous MATLAB, nous pouvons inverser cette relation pour avoir :

$$U_{max} = g^{-1}(AI). \quad (3.8)$$

Finalement, si l'on suppose que le profil de vitesse dans la couche de Hartmann n'est pas trop modifié quand la couche se déstabilise, ce que l'expérience laisse supposer, on a toujours [10] :

$$U_{max} = \frac{L}{\pi r_w (r_w^2 - r_e^2)} \quad (3.9)$$

(3.8) et (3.9) donnent :

$$L = g^{-1}(AI) \quad (3.10)$$

avec  $A = \frac{3B}{8\pi\rho} \left( \frac{r_w^2 - r_e^2}{r_w^3 - r_e^3} \right)$ .

### 3.3.2 premiers résultats : $B=0.5$ T et $B=0.8$ T

La relation (3.10) nous permet de tracer une courbe  $L = f(I)$ , que nous comparons avec les résultats expérimentaux sur les figures fig. 3.3 et fig. 3.4, respectivement pour  $B = 0.5T$  et  $B = 0.8T$ . Avec ce raisonnement simple sur les grandeurs intégrales, nous obtenons ( $B = 0.5T$ ) des résultats à 20% des données expérimentales. Ceci est pour le moins encourageant avant de passer aux simulations numériques sur les valeurs locales de l'écoulement, abordées dans le chap. 4.

## 3.4 propriétés du modèle

### 3.4.1 calcul du "temps caractéristique" de l'écoulement turbulent

Le terme de frottement turbulent dû à la couche de Hartmann turbulente dans (3.2) est homogène au rapport  $\frac{L}{t_t}$ , où  $t_t$  est le temps à évaluer :

$$\frac{L}{t_t} \sim \frac{2\pi}{\rho a} \int_0^{r_w} 2\tau_W(u(r)) dr \quad (3.11)$$

En utilisant le théorème de la moyenne comme au §. 3.3 :

$$\frac{L}{t_t} \sim \frac{4\pi}{3\rho a} (r_w^3 - r_e^3) \tau_W(U_{max}) \quad (3.12)$$

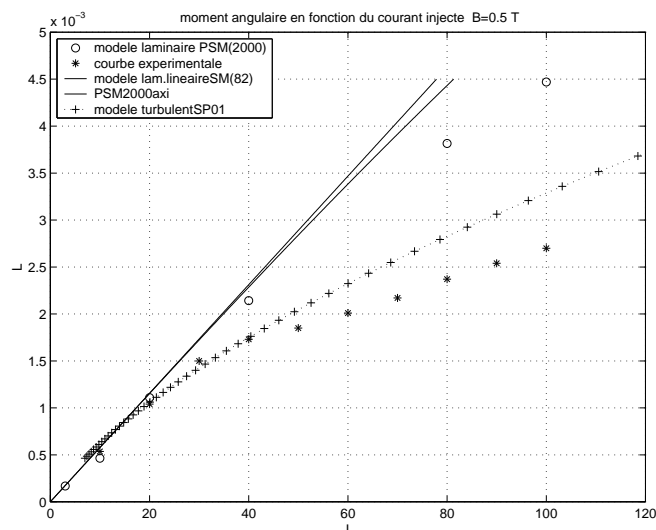


FIG. 3.3 – au dessus de  $I = 30A$ , les modèles laminaires s'écartent considérablement de la courbe expérimentale. Le modèle turbulent est plus précis, et présente surtout une pente proche de la droite expérimentale.

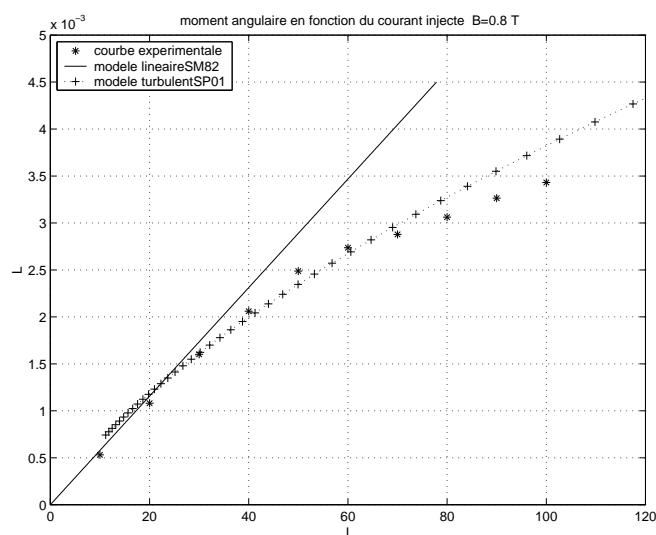
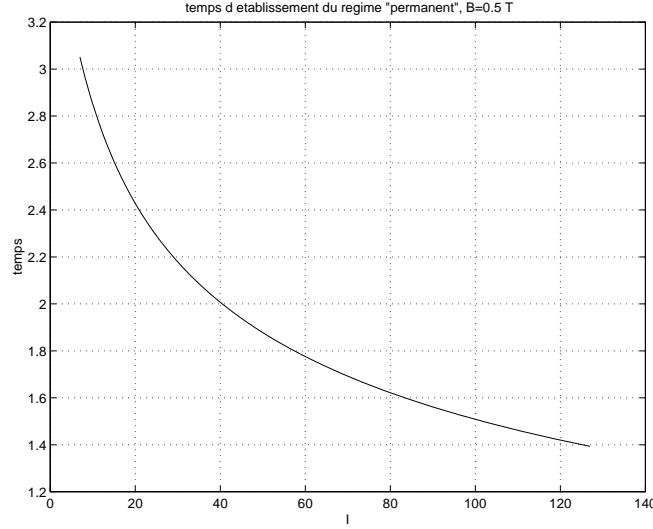


FIG. 3.4 – moment angulaire à  $B = 0.8T$ . Le champ étant plus fort, la destabilisation de la couche de Hartmann semble apparaître pour un courant injecté  $I = 45A$  supérieur.


 FIG. 3.5 – temps caractéristique de l'écoulement turbulent, à  $B = 0.5T$ .

De plus, avec  $\delta_t$  l'épaisseur dimensionnelle de la couche turbulente, on a :

$$\tau_W = \mu \partial_\xi u \sim \mu \frac{U_{max}}{\delta_t}, \quad (3.13)$$

$$\text{or, } L = U_{max} \pi r_w (r_w^2 - r_e^2). \quad (3.14)$$

donc :

$$t_t \sim \frac{\rho a \delta_t}{2\mu} \quad (3.15)$$

D'autre part, en couplant (3.14) et (3.11), on obtient une expression de  $t_t$  en fonction du couple  $(R, \tau_W(R))$  ( $R = \frac{Re}{Ha}$ ) :

$$t_t \sim \frac{\delta a}{2\nu R \tau_W}. \quad (3.16)$$

Ainsi, disposant d'une tabulation de  $(R, \tau_W(R))$  (cf § 3.2), on peut tracer la courbe du temps caractéristique turbulent (fig. 3.5) en fonction du courant total injecté  $I$ . On constate que le temps caractéristique turbulent décroît quant le forçage imposé à l'écoulement augmente. Ce n'est pas le cas en régime laminaire où le temps caractéristique de l'écoulement ne dépend que du champ magnétique et vaut  $t_h = \frac{a^2}{\nu} \frac{1}{Ha}$ .

### 3.5 estimation d'erreur

En régime turbulent, l'épaisseur de la couche limite est d'une part plus grande que celle de la couche laminaire, et d'autre part dépend de la vitesse de cœur. Ainsi, comme  $U_{cœur}$  varie avec  $r$ , la couche de Hartmann crée un fond irrégulier. Aussi, la couche étant plus épaisse, l'erreur introduite en assimilant la vitesse moyennée  $\bar{u}$  à la vitesse de cœur  $U_{cœur}$  est supérieure. Nous allons nous attacher à quantifier ces erreurs, ainsi que celle que l'on introduit en négligeant les termes inertiels  $(\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}'$ .

#### 3.5.1 effet de topographie dû à la couche de Hartmann

En appliquant l'opérateur moyenne défini en (2.15) à  $u$  pour passer au modèle 2d, on écrit :

$$\bar{u} = u_{cœur} + \frac{\delta_t}{a} \int_0^\infty [-u_{cœur} + u_{couche}(\xi)] d\xi. \quad (3.17)$$

Ainsi, en approximant  $\bar{u}$  à  $u_{cœur}$ , on fait une erreur d'ordre :

$\frac{\delta_t}{a} \int_0^\infty [-u_{cœur} + u_{couche}(\xi)] d\xi$ . L'intégrale étant d'ordre 1, il est intéressant d'évaluer l'épaisseur dimensionnelle de couche  $\delta_t$  en fonction de  $U_{cœur}$ .

D'après [2], on a :

$$\delta^* = \frac{\delta}{\rho \nu} \frac{\tau_W}{u} \quad (3.18)$$

avec  $\delta^* = \frac{\delta_t}{\delta}$ . On peut donc tracer un profil d'épaisseur de couche de Hartmann turbulente. Sur la fig. 3.6, on constate une valeur typique atteinte :  $\delta^* = \frac{\delta_t}{\delta} \sim 2$ . A noter que dans le cas laminaire, l'épaisseur de la couche de Hartmann est indépendante de la vitesse  $u$  et vaut  $\delta = \frac{a}{Ha}$ . On trouve dans notre cas un rapport 2 entre l'épaisseur turbulente et l'épaisseur laminaire. L'erreur introduite n'est pas pour autant supérieure dans la mesure où nous travaillons  $Ha$  plus grand. Typiquement, à  $B = 0.5T$  et  $I = 60A$ ,  $Ha = 132$ , d'où une erreur de  $\frac{2}{132} = 1.5\%$ .

#### 3.5.2 effet de "bosselage" du fond

Nous souhaitons estimer l'influence des variations d'épaisseur de couche sur l'écoulement. Deux composantes du phénomène sont à étudier. Tout d'abord, un déplacement radial, suivant le profil de fond, devrait engendrer une vitesse verticale. Deuxièmement, la présence d'un tourbillon modifie la vitesse azimutale de l'écoulement, donc l'épaisseur de couche et le frottement associé. Dans les deux cas, une vitesse verticale que nous souhaitons quantifier est créée.

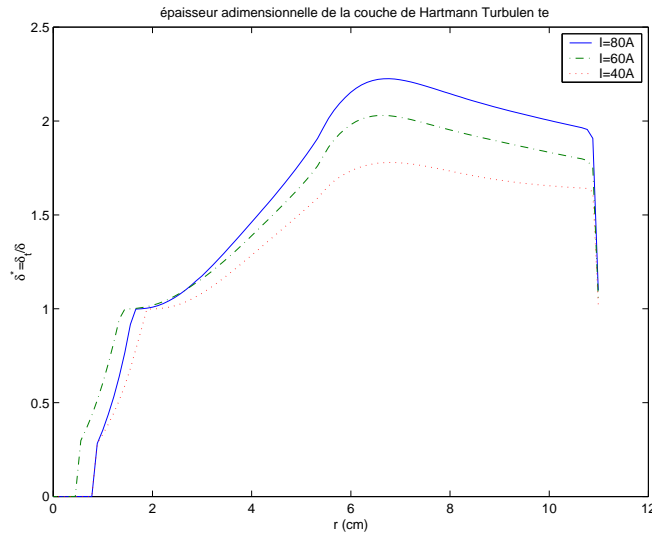


FIG. 3.6 – estimation de l’erreur par l’épaisseur de couche turbulente de Hartmann

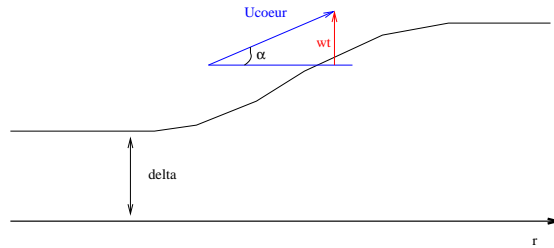


FIG. 3.7 – vitesse radiale confrontée à un profil de couche irrégulier engendrant une vitesse verticale.

**Vitesse radiale :** On se place donc dans le cas d’un écoulement à couche de Hartmann turbulente, dont l’épaisseur varie avec  $r$  comme décrit au §. 3.5.1. Ainsi, la vitesse radiale confrontée à un profil de fond ascendant génère une composante de la vitesse verticale (fig. 3.7). On peut exprimer cette composante  $w_t$  :

$$\frac{w_t}{U_{\text{coeur}}} \sim \tan(\alpha) = \frac{d\delta_t}{dr} \quad (3.19)$$

L’expression (3.19) nous permet d’évaluer  $w_t$ . On trouve  $\frac{w_t}{U_{\text{coeur}}} \sim 10^{-4}$ . Cet effet est donc négligeable.

**Tourbillons :** Nous nous plaçons désormais à  $r$  fixé, sur un cercle, et on s'intéresse aux variations d'épaisseur de couche turbulente dûes à l'existence de tourbillons. Nous pouvons écrire de même :

$$w_t \sim u_\theta \frac{\partial \delta_t}{\partial s} \text{ avec } s = r\theta \quad (3.20)$$

$u_\theta$  est la vitesse azimutal. On constate qu'un tourbillon provoque une variation de vitesse de l'ordre de 10% de la norme de  $u_\theta$ . D'autre part, on estime avec les profils de vitesse et de couche turbulente un rapport (sur un tourbillon de 3cm)  $\Delta \delta_t \sim 0.03 \delta_t$ . En prenant comme taille caractéristique d'un tourbillon 3cm, on peut évaluer :

$$\frac{\partial \delta_t}{\partial s} \sim \frac{30\% \delta_t}{310^{-2}} \sim \delta_* \frac{a}{Ha} \sim 2 \frac{0.01}{132} \quad (3.21)$$

Ainsi, on a  $\frac{w_t}{u_\theta} \sim 10^{-4}$ .

Nous pouvons donc aisément estimer que les vitesses verticales sont négligeables, et donc que nous ne faisons pas une erreur significative en ne considérant pas ces phénomènes dans notre étude.

Cependant, si ceux-ci avaient été conséquents, nous aurions pu les prendre en compte de manière analytique comme termes supplémentaires dans le modèle 2d. Nous aurions pour cela suivie une démarche analogues à celle utilisée dans les modèles quasi-géostrophiques, en fluide tournant, exposée dans [8].

### 3.5.3 épaisseurs de couches parallèles :

On s'intéresse dans cette partie aux épaisseurs des couches parallèles au champ magnétique, c'est à dire à la couche cisailée et la couche pariétale. En supposant que la diffusion verticale du frottement de la couche de Hartmann dans la couche parallèle est instantanée, on peut écrire que la couche parallèle résulte de l'équilibre entre le frottement visqueux suivant  $y$  et le frottement de la couche de Hartmann turbulente. Ceci se traduit par :

$$\frac{\tau}{\rho a} \sim \nu \partial_{yy}^2 u \quad (3.22)$$

Il est montré dans [9] que cette hypothèse de diffusion instantanée n'est pas rigoureusement juste et introduit une erreur de 10% sur le profil de couche parallèle.

Cependant, en appliquant ce modèle simplificateur, on peut estimer le rapport entre la couche parallèle turbulente et laminaire.

$$\frac{\delta_{\parallel, turbu}}{\delta_{\parallel, lam}} = \frac{1}{\sqrt{\delta^*}}. \quad (3.23)$$

$\delta_* = \frac{\delta_t}{\delta}$ , rapport entre les épaisseurs de couches de Hartmann turbulente et parallèle. On constate en se référant à l'allure de  $\delta_*$  (fig. 3.6) que l'épaisseur de la couche parallèle est en régime turbulent plus faible qu'en régime laminaire, typiquement d'un facteur  $\sqrt{2}$ .

### 3.5.4 termes inertiels

**Écart à la moyenne :** Dans la couche de Hartmann,  $u'$ , qui représente l'écart entre la vitesse moyennée  $\bar{u}$  et la vitesse de couche, vaut :

$$u' = \bar{u} - u_{couche} = u_{cœur}. \quad (3.24)$$

Alors, on peut estimer l'ordre de grandeur des termes inertiels :

$$\overline{(\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}'} \sim \left( \frac{U_{cœur}^2}{r_w} \frac{\delta_t}{a} \right) \quad (3.25)$$

Ce qui peut aussi s'écrire en grandeurs adimensionnelles :

$$\overline{(\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}'} \sim \frac{\delta^* a}{HaN} \quad (3.26)$$

avec  $\delta^* = \frac{\delta_t}{\delta}$ .

Autrement dit, le terme inertiel  $\overline{(\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}'}$  est  $Ha$  fois plus faible que  $\overline{(\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla) \mathbf{u}_\perp}$ . Il est donc légitime de les négliger, sachant que dans notre configuration à  $B = 0.5T$ ,  $Ha = 132$ .

**Recirculations :** La forte rotation présente dans l'écoulement engendre des effets inertiels dans la couche de Hartmann que nous avons négligés.

En effet, dans le cœur de l'écoulement, il y a à la frontière d'un tourbillon de rayon  $R$  équilibre entre force centrifuge et gradient de pression. On peut estimer cette force :  $\frac{U_{cœur}^2}{R}$ , ce qui nous donne un ordre de grandeur de la pression.

Dans la couche de Hartmann, la vitesse s'effondre alors que le gradient de pression reste invariant. Il y a donc un flux de matière centripète dans la couche de Hartmann à l'intérieur du tourbillon, qui par continuité crée un pompage et une vitesse verticale d'expulsion de matière de la couche. Le flux est ensuite éjecté du tourbillon radialement vers le cœur.

Ce flux centripète de matière pénétrant le tourbillon au niveau de la couche peut être interprété comme un forçage supplémentaire. Afin d'évaluer son influence, nous introduisons artificiellement un forçage  $\frac{U_{cœur}}{r_w^2}$  dans la couche.

L'équilibre entre la force de Laplace et ce forçage supplémentaire nous donne une vitesse radiale entrante de matière dans le tourbillon  $u_r^{erreur}$  :

$$u_r^{erreur} = \frac{U_{cœur}^2}{r_w} \frac{\rho}{\sigma B^2} \quad (3.27)$$

Par conservation de la masse, on en déduit :

▷ la vitesse verticale de pompage :

$$w_{ekman} = 2 \frac{U_{cœur}^2 \delta_t}{r_w^2} \frac{\rho}{\sigma B^2} \quad (3.28)$$

▷ la vitesse réinjectée dans le cœur :

$$u_{ekman} = \frac{U_{cœur}^2}{r_w} \frac{\rho}{\sigma B^2} \frac{\delta_t}{a}. \quad (3.29)$$

On peut calculer le rapport de la vitesse supplémentaire injectée dans le cœur et de la vitesse de cœur, ce qui nous donne une estimation d'erreur faite en négligeant ce phénomène de pompage :  $\frac{U_{cœur}^2}{r_w} \frac{\rho}{\sigma B^2} \frac{\delta_t}{a} = 0.7\%$ .

Encouragés par les résultats obtenus sur les valeurs intégrales utilisant des approximations relativement simples, nous nous attacherons désormais à décrire l'écoulement par de véritables simulations numériques sur des grandeurs locales de l'écoulement : FLUENT.



# Chapitre 4

## Simulations numériques

### 4.1 méthode générale

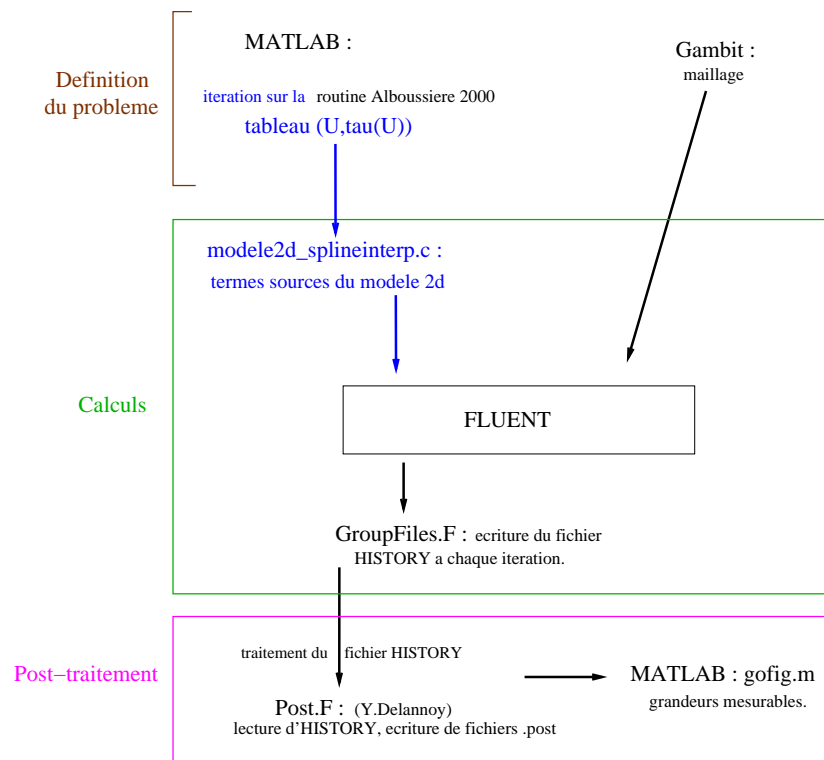


FIG. 4.1 – schema d'agencement des différents logiciels utilisés, contribution personnelle (en bleu des mers du sud).

## 4.2 Description détaillée

L'intérêt fondamental de cette méthode par rapport au raisonnement intégral décrit au §. 3.3 est de prendre en compte localement la dépendance  $\tau(U(r))$ , évitant ainsi les approximations faites en appliquant le théorème de la moyenne. Ces simulations visent également à produire une description très précise de l'écoulement et de toutes les quantités physiques.

### 4.2.1 modèle numérique

L'équation associée au modèle 2d est résolue à l'aide du code commercial FLUENT/UNS v5.5. Ce dernier utilise une formulation classique en vitesse et pression sur maillage destructuré pour l'équation de Navier Stokes couplée à l'équation de continuité. La résolution est effectuée en instationnaire sans hypothèse quant à l'éventuel caractère turbulent de l'écoulement. L'algorithme PIZO mis en jeu est une méthode de correction de pression implicite qui traite les équations pour chaque scalaire les unes après les autres (mode *ségrégatif*). La discrétisation spatiale fait intervenir une formulation en volumes finis, avec un schéma du second ordre décentré amont pour les termes convectifs et central pour les termes diffusifs (le gradient sur une face est calculé pas différences centrales). Le schéma temporel est du second ordre implicite.

Le maillage utilisé (fig. 4.2) comporte 16350 quadrilatères pour une résolution radiale moyenne de  $0.9mm$  loin de la paroi et une résolution azimutale qui varie de  $4.6mm$  au mur extérieur à  $0.9mm$  au centre du disque. Le maillage radial est fin et progressif à proximité de la paroi extérieure si bien que en dépit du fort phénomène d'écrasement subit par la couche limite, celle-ci est toujours décrite par une dizaine de points au moins.

Le pas de temps est choisi de sorte qu'il impose la même fréquence de coupure spatiale que le maillage, elle même supérieure à celle des plus petites échelles de l'écoulement (couches parallèles).

Toutes les valeurs moyennes présentées sont calculées alors que les grandeurs intégrales (moment cinétique, énergie) ne varient plus de manière significative sur une durée de l'ordre de  $t_t$ .

Les simulations sont effectuées pour des valeurs de champ  $B = 0.5T$  et  $B = 0.8T$  et le courant total injecté varie de 20 à 100 A. À  $t = 0$ , l'écoulement est au repos et le courant électrique est injecté à sa valeur  $I$ . La couronne de fluide ( $r_e < r < r_w$ ) est donc mise en mouvement et accélère jusqu'à atteindre une vitesse de rotation à peu près constante.

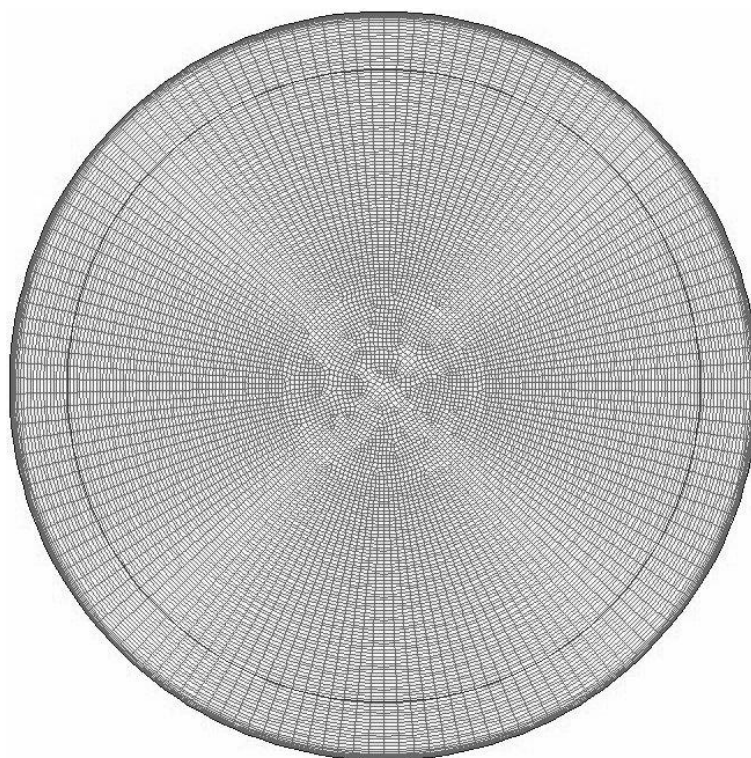


FIG. 4.2 – maillage utilisé pour les simulations numériques de l'expérience MATUR.

### 4.2.2 implémentation du modèle turbulent 2d dans FLUENT

N'utilisant pas de modèle défini par FLUENT pour traiter la turbulence de l'écoulement, nous simulons directement les termes sources supplémentaires résultants de notre modèle semi-analytique. Ceux-ci sont intégrés à FLUENT sous forme de routines programmées en langage C (User Defined Function).

**Interpolation cubic spline :** Le programme principal de FLUENT appelant le frottement  $\tau(U(r))$  en chaque point du maillage, il est nécessaire d'effectuer une interpolation sur le tableau  $(U, \tau(U))$  construit au §.3.2. La méthode d'interpolation *cubic spline* a retenu notre attention dans la mesure où elle produit des fonctions de dérivées premières et secondes continues. En effet, l'équation de Navier Stokes requiert des solutions de classe  $C^2$  en raison de la présence du Laplacien. D'autre part, nous avons pu constater lors de nos simulations qu'un frottement de classe  $C^2$  améliore considérablement la convergence de l'algorithme.

**Introduction d'un seuil :** Notre écoulement partant d'une vitesse nulle avant injection de courant, nous devons être capable de rendre compte d'un frottement laminaire dans les premiers instants. D'autre part, une fois en régime établi, il reste des zones de faibles vitesses, typiquement au centre du disque. Ceci pose le problème de la nature de la destabilisation d'une part, et de l'existence d'un seuil de destabilisation (cf §. 2.6). Nous avons aussi pris le parti d'introduire un seuil sur  $R = \frac{Re}{Ha}$  de sorte que nous prenons comme terme source :

- ▷ le frottement lineaire dans une couche de Hartmann laminaire pour  $R < R_t$
- ▷ notre frottement turbulent pour  $R > R_t$

**Signification :** L'existence d'un tel seuil suppose une destabilisation de la couche de Hartmann locale. C'est une hypothèse physique non vérifiée sur laquelle il n'existe pour l'instant pas de résultats. Pablo Moresco (CUED), mène actuellement des études sur ce sujet, qui nous permettront d'avoir une hypothèse plus précise quant à la nature de la destabilisation.

**Calcul du seuil :** Il nous faut donc estimer la valeur  $R_t$  de destabilisation de la couche de Hartmann. En se référant aux courbes expérimentales des figures fig. 3.3 fig. 3.4, on peut observer une rupture de pente de la courbe  $L = f(I)$ . Nous supposons que cette rupture de pente correspond à un

changement de régime de la couche de Hartmann. À  $B = 0.5T$  comme à  $B = 0.8T$ , nous trouvons un  $R_t \sim 330$ . La cohérence du résultat trouvé aux deux différents champs nous conforte dans notre hypothèse.

### 4.2.3 post traitement

À chaque pas de temps nous faisons exécuter à FLUENT une suite d'instructions par la lecture d'un "journal". Nous pouvons ainsi enregistrer des clichés de l'écoulement et écrire dans un fichier binaire HISTORY une sauvegarde de toutes les grandeurs auxquelles nous ferons appel pour le post traitement. Le post traitement est effectué sous MATLAB. La routine *go-fig.m*, écrite par Y. Delannoy, traite le fichier HISTORY et sort des résultats de profils locaux, valeurs moyennes, spectres, grandeurs intégrales.

## 4.3 résultats

A titre indicatif, FLUENT est installé sur une station "alphaserver DS10", de son petit nom "mash", et chaque cas  $(B, I)$  nécessite une semaine de calcul. Nous nous sommes concentrés sur un champ  $B = 0.5T$ , aux intensités  $I = (20, 40, 60, 80, 100)A$ . À un tel champ, la couche devient turbulente pour  $I = 30A$ . et les effets inertiels liés à la rotation sont faibles.

### 4.3.1 aspect de l'écoulement 2d

**Évolution temporelle :** Nous pouvons voir l'évolution dans le temps de notre écoulement sur les figures fig. 4.3 et fig. 4.4. L'écoulement est visualisé par le haut. A  $t = 0s$ , nous injectons le courant. On voit nettement la couche cisailée apparaître. La couronne extérieure est mise en rotation, alors que le disque intérieur est immobile : la couche cisailée se destabilise rapidement, donnant naissance à de nombreux petits tourbillons ( $t = 1.1s$ ). Les petites structures ont tendance à se regrouper pour former de plus gros tourbillons (comme prédit par la théorie du maximum d'entropie en turbulence 2d, [13]), typiquement au nombre de 4 pendant la phase d'établissement du régime. Le nombre de 4 tourbillons est probablement dû à des erreurs numériques et n'a pas de véritable sens physique. À  $t = 10s$ , les grandeurs intégrales ont atteint une valeur plafond. L'écoulement turbulent tourne alors à vitesse constante. Le forçage et le frottement turbulent sont en équilibre légèrement instable, ce qui se traduit par des cycles de regroupement puis séparation des tourbillons.

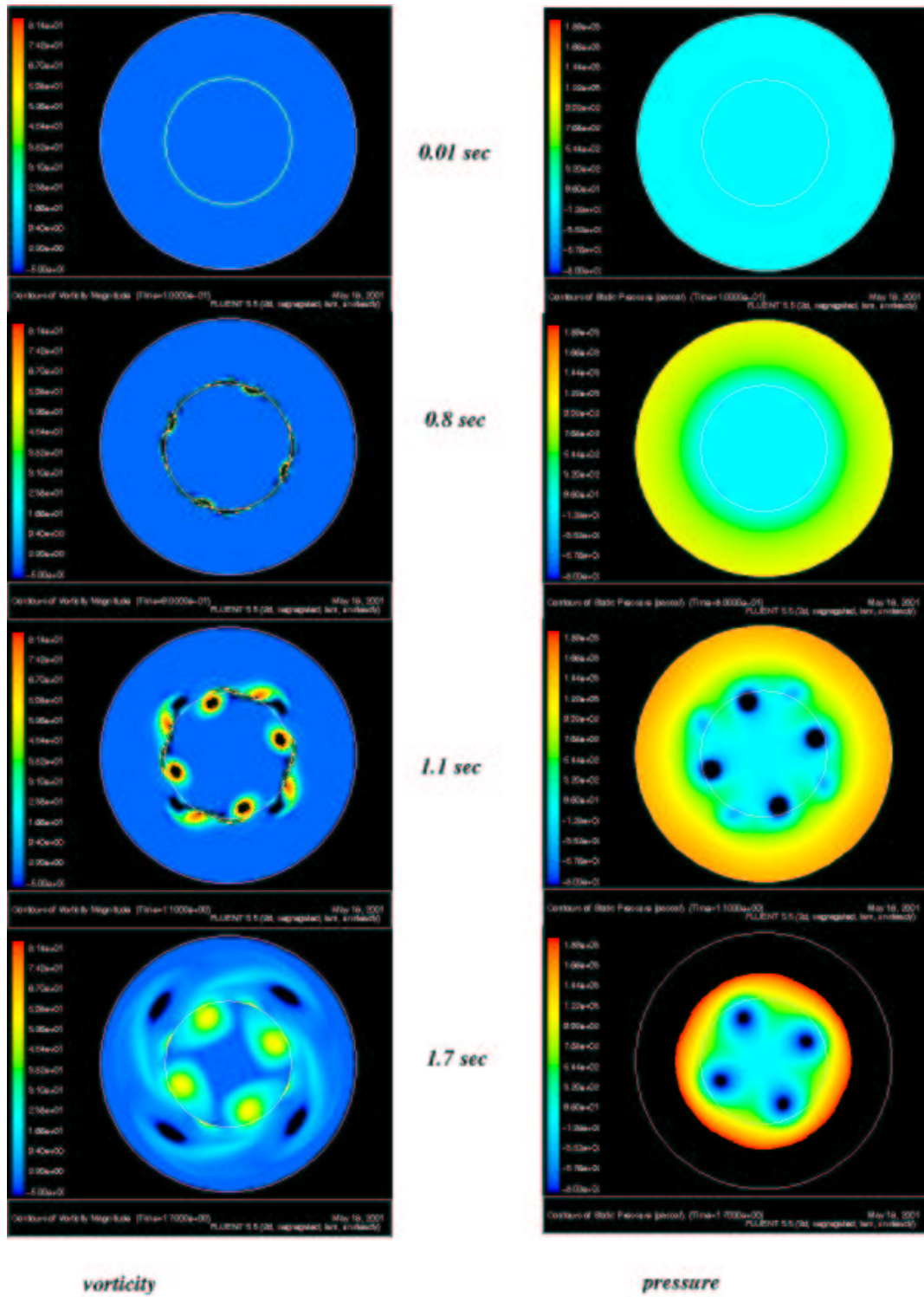


FIG. 4.3 – evolution temporelle de l'écoulement à  $B = 0.5T$  et  $I = 60A$

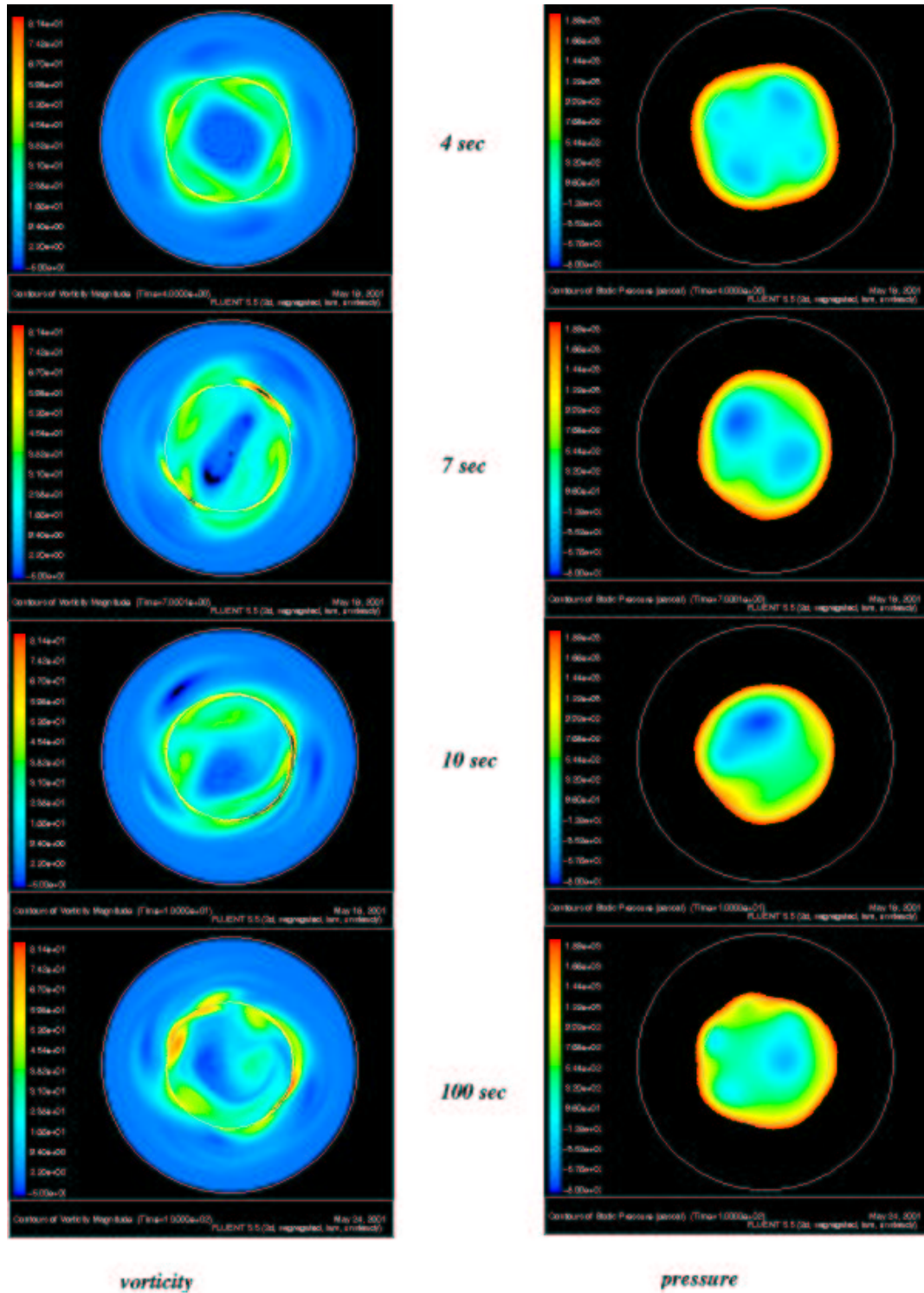


FIG. 4.4 – évolution temporelle de l'écoulement à  $B = 0.5T$  et  $I = 60A$ .

**États de quasiéquilibre :** il peut être intéressant de comparer l'allure de l'écoulement donné par le modèle inertiel en couche de Hartmann laminaire et celle prévue par notre modèle turbulent, ainsi que le comportement de l'écoulement en régime établi à différentes valeurs du courant. Il semble que le modèle turbulent favorise les petites structures. (4.5)

En se référant aux clichés de pression de l'écoulement, nous pouvons compter le nombre moyen de tourbillons en régime quasi-stationnaire. Le forçage a tendance à engendrer de petites structures, au contraire de la turbulence 2d qui regroupe les tourbillons. En effet, on peut observer à  $I = 40A$  deux tourbillons en moyenne, et trois pour  $I$  variant de 60 à 100A. Ces observations sont relativement approximatives.

À savoir que les pentes importantes de spectres turbulents et le nombre de structures cohérentes dans ces écoulements mhd font l'objet de beaucoup de questions.

### 4.3.2 moment angulaire

Comme nous pouvons le voir sur la fig. 4.6, le moment angulaire résultant des simulations sur les valeurs locales par FLUENT est considérablement plus proche des résultats expérimentaux. Les écarts entre les simulations et les valeurs expérimentales valent désormais :

- 18.1% à  $I = 20A$ ,
- 18% à  $I = 40A$ ,
- 8.5% à  $I = 60A$ ,
- 5.2% à  $I = 80A$ ,
- 4% à  $I = 100A$ .

Nous constatons que notre modèle est d'autant plus précis que le forçage est fort. Soit encore plus la couche de Hartmann est destabilisée, meilleure est notre description, ce qui est heureux dans la mesure où notre travail se base sur un modèle de couche limite turbulente.

### 4.3.3 profils locaux

Nous avons d'autre part accès au profil de vitesse azimutale, cf fig. 4.7. On constate que, aux valeurs maximales de la vitesse, notre modèle turbulent prévoit des vitesses inférieures aux mesures expérimentales. L'écart entre les grandeurs simulées et expérimentales peut atteindre 20%. En revanche, la zone d'injection du courant est bien décrite et l'allure de du profil en  $\frac{1}{r}$  est réaliste. Il est aussi important de noter que à de telles vitesses de mercure, typiquement  $1m/s$ , dans une configuration restreinte,  $r = 11cm$ , la précision expérimentale est moindre et les erreurs peuvent atteindre 10%. D'où les



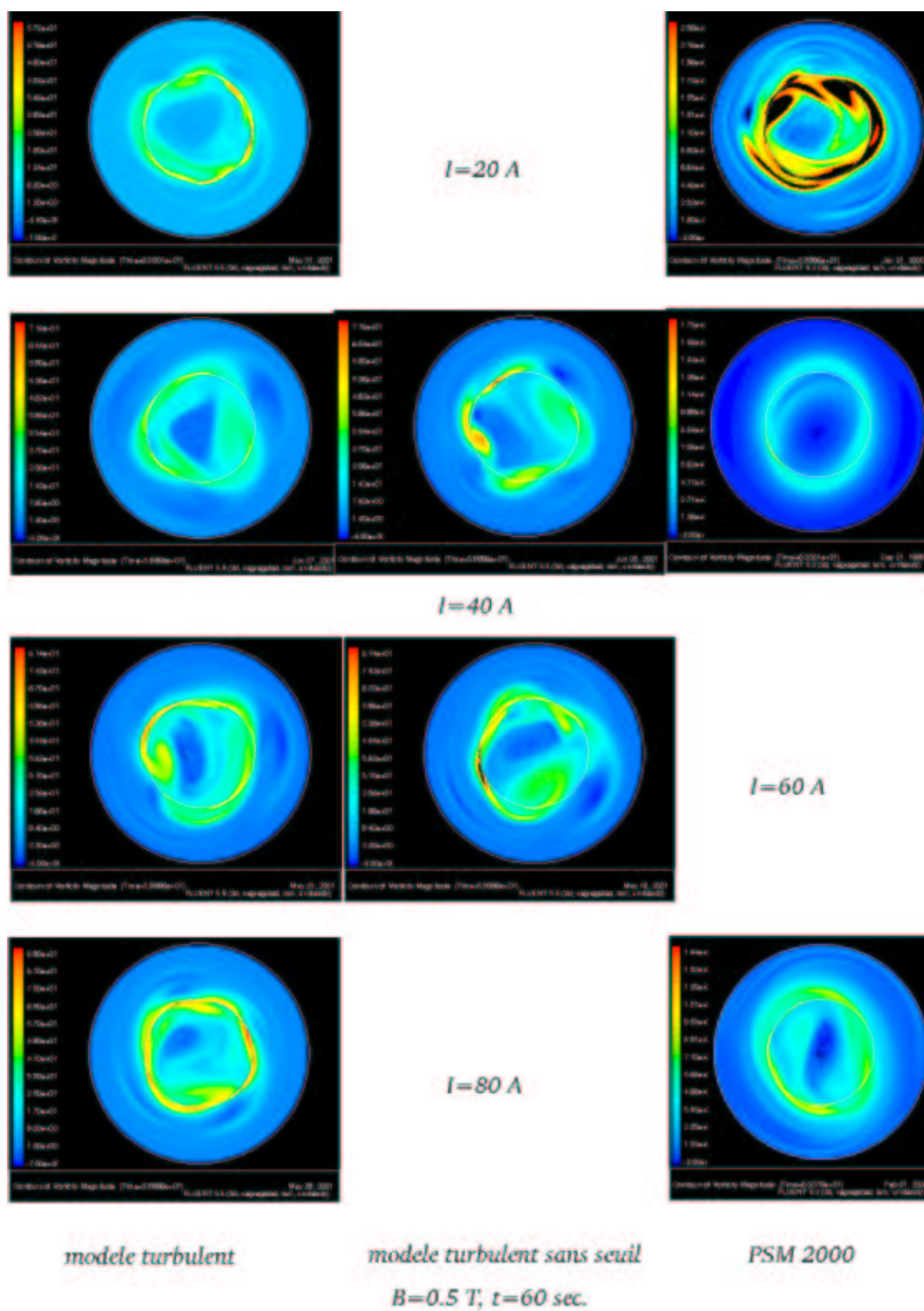


FIG. 4.5 – comparaison des différents modèles 2d à  $B = 0.5 T$  en régime quasi-stationnaire.

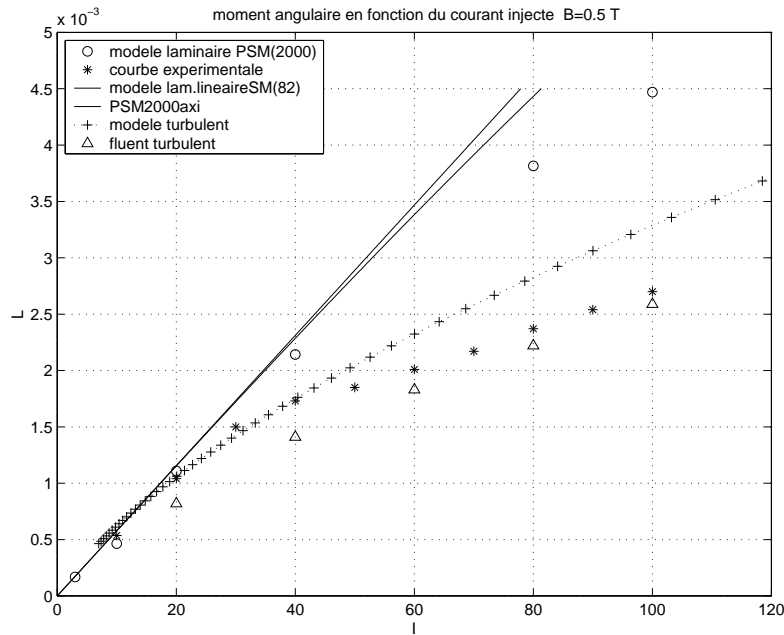


FIG. 4.6 – moment angulaire calculé à partir des valeurs locales de la vitesse simulées par FLUENT.

”oscillations” observables sur le profil expérimental, oscillations qui n’ont pas de véritable sens physique.

Nous constatons tout comme dans le §. 4.3.2 que les résultats donnés par notre modèle sont d’autant plus précis que le forçage est élevé, c’est à dire pour une couche de Hartmann plus destabilisée.

#### 4.3.4 épaisseur de la couche cisailée libre

En se référant à fig. 4.7, nous pouvons essayer de déduire des profils de vitesses à différents  $I$  l’épaisseur de la couche cisailée. Afin d’utiliser une démarche identique avec la méthode expérimentale [6], nous effectuons cette mesure en prolongeant la pente du profil de vitesse, qui définit en ses points d’intersections les frontières de la couche cisailée. Elle coupe d’une part l’axe des abscisses, et d’autre part le profil de couronne extérieure. Nous trouvons les épaisseurs suivantes :

$$I = 20A \Rightarrow e = 3cm$$

$$I = 40A \Rightarrow e = 3.8cm$$

$$I = 60A \Rightarrow e = 4cm$$

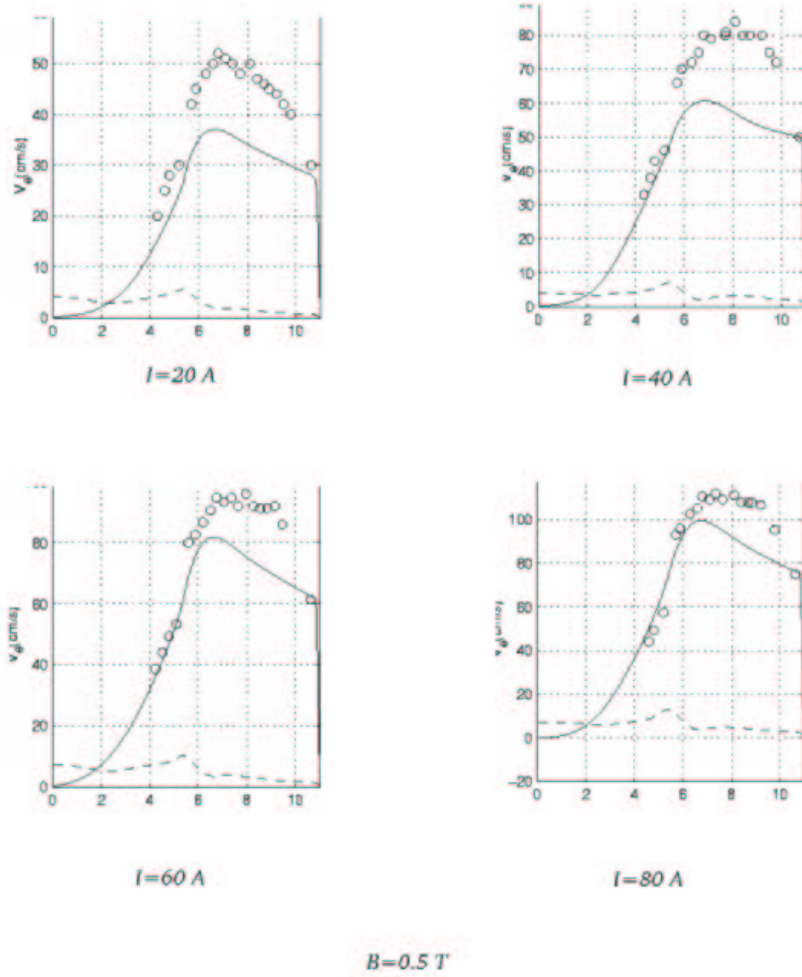


FIG. 4.7 – profil de vitesse : comparaison entre les valeurs expérimentales et les simulations FLUENT,  $B = 0.5T$  et  $I = 20, 40, 60, 80A$ .

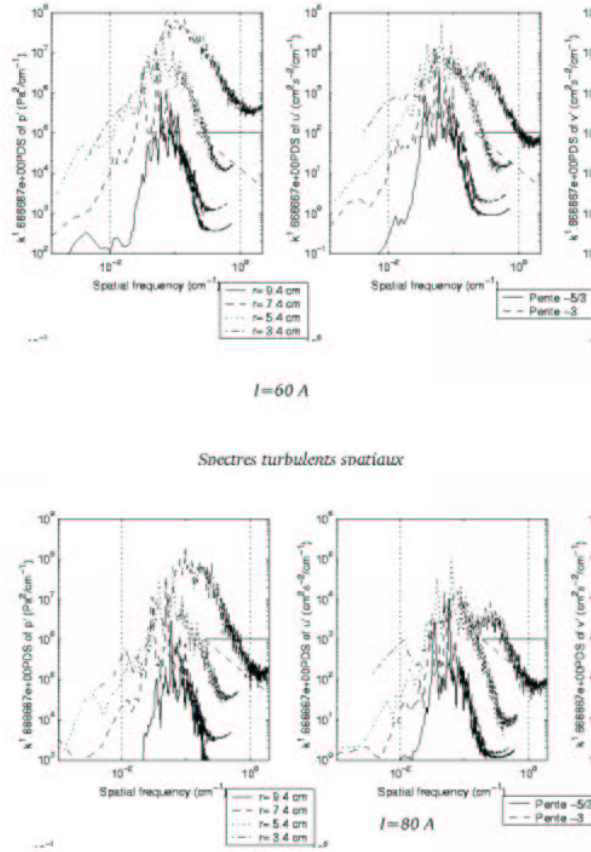


FIG. 4.8 – spectres turbulents spatiaux de l'écoulement simulé à  $B = 0.5T$ .

$$I = 80A \Rightarrow e = 4.1cm \tag{4.1}$$

L'erreur impliquée par cette démarche ne nous permet pas d'en déduire un loi de comportement, mais nous observons néanmoins que l'épaisseur de la couche a tendance à croître avec la vitesse.

### 4.3.5 spectre

Les spectres turbulents, fig. 4.8 et fig. 4.9, présentent des pentes spectaculaires, de l'ordre de  $k^{-j}$ ,  $j > 4$ . Nous n'avons pas d'explications concernant de telles pentes. À titre indicatif, les pentes fréquemment rencontrées en turbulence sont  $k^{-5/3}$  et  $k^{-3}$ .  $k^{-5/3}$  est une pente classique de turbulence homogène 3d.  $k^{-3}$  est une pente caractéristique d'une cascade d'entrophie vers les petites échelles. [4], [5], [12].

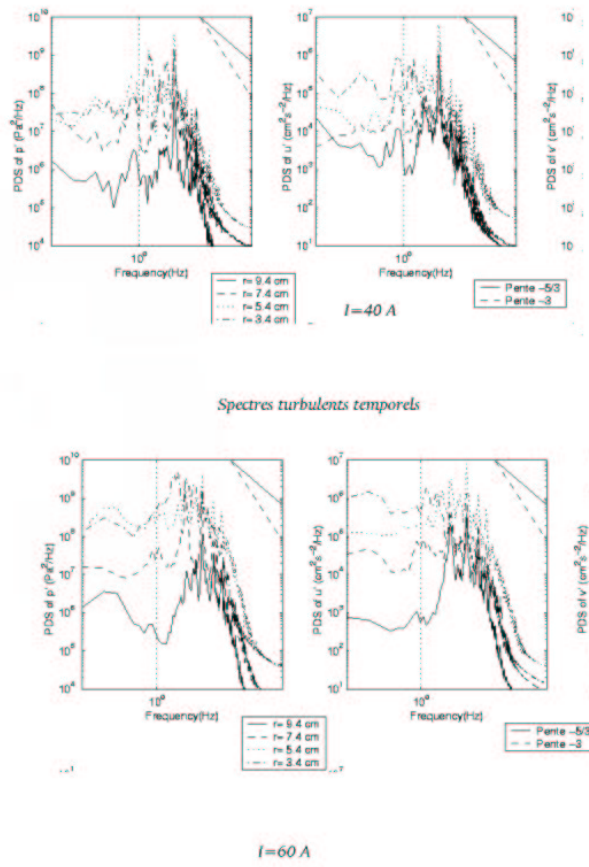


FIG. 4.9 – spectres turbulents temporels de l'écoulement simulé à  $B = 0.5T$ .

D'une manière générale, notre modèle sous estime les vitesses par rapport à l'expérience. Les estimations d'erreurs du §.3.5 montrent que les phénomènes négligés sont peu importants dans les conditions de simulations. Il est donc possible que cette erreur découle du caractère simpliste du modèle de Prandtl utilisé pour décrire la couche de Hartmann.

Cela dit, nous apportons là une première description assez précise d'écoulement 2d avec couche de Hartmann turbulente. Nous sommes capables de prédire des résultats sur les valeurs intégrales avec une précision de 5% et les profils locaux avec une précision de l'ordre de 10 à 15%. La précision s'accroît avec le caractère turbulent de la couche de Hartmann, ce qui justifie notre démarche.

# Chapitre 5

## Conclusion

Les modèles 2d, bien connus et fréquemment utilisés, sont des véritables modèles physiques qui ne font pas intervenir d'inconnue numérique ou d'ajustement de coefficients. En suivant une démarche équivalente, nous avons ainsi construit un modèle fiable pouvant désormais servir d'expérience de référence pour comprendre les propriétés de certains écoulement mhd turbulents confinés entre deux plans.

Nous nous sommes intéressés à un écoulement de mercure étudié par l'expérience de référence MATUR. Notre tâche a consisté à apporter une description des phénomènes physiques dans une gamme de paramètres jusqu'ici non explorée, c'est à dire quand l'écoulement comporte une couche de Hartmann turbulente.

Avec un modèle néanmoins simple, nous avons obtenu de nombreux résultats avec une précision plus qu'acceptable. Considérer les recirculations entre le cœur de l'écoulement et la couche de Hartmann permettrait de prendre en compte les effets inertiels pour étendre notre description.

Avant cela, un important travail d'analyse des résultats reste à faire, notamment concernant les spectres turbulents.

Finalement, il serait maintenant intéressant d'étudier les propriétés de ce modèle, vis à vis du transport de scalaire passif, typiquement la température, et aussi son influence sur la stabilité de l'écoulement.

# Bibliographie

- [1] Alboussière and Lingwood. On the stability of the hartmann layer. *Physics of Fluids*, 11 :2058–2068, 1999.
- [2] T. Alboussière and R. J. Lingwood. A model for the turbulent Hartmann layer. *Physics of Fluids*, 12(6) :1535–1543, 2000.
- [3] H.M. Hua and W.E. Lykoudis. Turbulent measurements in magneto-fluid mechanics channel. *Nucl. Sci. Eng.*, 45 :445, 1974.
- [4] R.H. Kraichman. Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids.*, 10, 1967.
- [5] R.H. Kraichman. Inertial ranges transfert in two- and three-dimensional turbulence. *J. Fluid. Mech.*, 47 :525–535, 1971.
- [6] Karim Messadek. *Une expérience sur la turbulence MHD quasi-bidimensionnelle*. PhD thesis, INPG, 2001.
- [7] R. Moreau. *Magnetohydrodynamics*. Kluwer Academic Publisher, 1990.
- [8] J. Pedlosky. *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer Verlag, 1987.
- [9] A. Pothérat, J. Sommeria, and R. Moreau. An effective two-dimensionnal model for MHD flows with tranverse magnetic field. *J. Fluid. Mech.*, 424 :75–100, 2000.
- [10] Alban Pothérat. *Étude et modèles effectifs d'écoulements quasi-2D*. PhD thesis, INPG, 2000.
- [11] P.H. Roberts. *Introduction to Magnetohydrodynamics*. Longmans, 1967.
- [12] J. Sommeria. Experimental study of the two-dimensionnal inverse energy cascade in a square box. *J. Fluid. Mech.*, 170 :139–168, 1986.
- [13] J. Sommeria, C. Staquet, and R. Robert. Final equilibrium state of the two-dimensionnal shear layer. *J. Fluid. Mech.*, 233 :661–689, 1991.
- [14] Joël Sommeria and René Moreau. Why, how and when, MHD turbulence becomes two-dimensionnal. *J. Fluid Mech.*, 118 :507–518, 1982.